

باسمه تعالی

مسابقه دانشکده علوم ریاضی اسفند ۱۳۹۳

روز اول، زمان: ۴ ساعت

۱. ۱۳۹۳ نقطه در صفحه داده شده است. فرض کنید l خطی باشد که مجموع فاصله نقاط از آن مینیمم است. نشان دهید l از دست کم یکی از نقطه‌ها می‌گذرد.

۲. نشان دهید برای هر تابع دلخواه $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تعداد نقاط ماکزیمم موضعی اکید حداکثر شمارا است.

۳. فرض کنید G یک p -گروه متناهی باشد و $x, y \in G$ به طوری که هر زیرگروه نرمال از G که شامل $xyx^{-1}y^{-1}$ باشد شامل x نیز هست. نشان دهید $x = 1$.

۴. n^2 عدد حقیقی که دست کم $2n - 1$ تا از آن‌ها متمایز هستند داده شده است. نشان دهید می‌توان این اعداد را طوری در یک ماتریس $n \times n$ قرار داد که ماتریس به دست آمده وارون‌پذیر باشد.

۵. فرض کنید K یک میدان و $M_n(K)$ حلقه ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های در K باشد. نشان دهید اگر نگاشت $\phi: M_n(K) \rightarrow M_m(K)$ یک هم‌ریختی (حافظ جمع و ضرب و عنصر همانی) باشد m مضربی از n است.

باسمه تعالی

مسابقه دانشکده علوم ریاضی اسفند ۱۳۹۳

روز دوم، زمان: ۴ ساعت

۱. نشان دهید ماتریس 3×3 با درایه‌های مختلط مانند X وجود ندارد که

$$X^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

۲. راس‌های یک گراف در تناظر با زیرمجموعه‌های $\{1, \dots, n\}$ هستند و بین دو راس یال وجود دارد اگر اشتراک زیرمجموعه‌های متناظرشان حداکثر r عضوی باشد. نشان دهید عدد رنگی این گراف برابر است با

$$\sum_{i=0}^{r+1} \binom{n}{i}$$

(عدد رنگی کم‌ترین تعداد رنگ‌های لازم برای رنگ‌آمیزی راس‌های گراف است طوری که هیچ دو راس مجاور هم‌رنگ نباشند).

۳. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ هموار است و برای هر x دست‌کم یکی از $f(x)$ یا $f''(x)$ برابر صفر است. نشان دهید f تابعی خطی است.

۴. فرض کنید $X = \{1, \dots, n\}$. مجموعه $S = \{f: S \rightarrow S\}$ با عمل ترکیب توابع یک نیم‌گروه است. نشان دهید در بین همه زیرنیم‌گروه‌های S که شامل نگاشت‌های یک به یک هستند دقیقاً یک زیرنیم‌گروه ماکسیمال وجود دارد و آن را معرفی کنید.

۵. نشان دهید برای هر دنباله x_1, x_2, \dots از اعداد در بازه $[0, 1]$ ، عدد x در این بازه وجود دارد که سری زیر همگرا باشد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 |x - x_n|}$$