

## مسابقه دانشکده علوم ریاضی

روز اول، زمان: ۴ ساعت

اسفند ۱۳۹۴

### سوال ۱

قطرهای چهارضلعی مسطح  $ABCD$  بر هم عمود هستند. نشان دهید اگر این چهارضلعی در صفحه طوری تغییر کند که طول اضلاع آن بی تغییر بماند، قطرهای همچنان بر هم عمود خواهند ماند.

### سوال ۲

$A$  ماتریسی  $n \times n$  با درایه‌های حقیقی و  $x \in \mathbb{R}^n$  برداری یکه است که برای هر بردار یکه دیگر مثل  $x$  داریم  $\|Ax\| \leq \|x\|$ . ثابت کنید برای هر بردار  $y \in \mathbb{R}^n$  اگر  $x$  و  $y$  عمود باشند آنگاه  $Ax$  و  $Ay$  هم عمود هستند.

### سوال ۳

نشان دهید برای هر زیرمجموعه چگال و شمارا از اعداد حقیقی مثل  $X$ ، همیومورفیسمی مانند  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  وجود دارد که  $f(X) = \mathbb{Q}$ .

### سوال ۴

ثابت کنید بازه بسته  $[0, 1]$  را نمی‌توان به صورت اجتماع مجزای تعداد نامتناهی شمارا بازه بسته نوشت. (مجموعه‌های تک نقطه‌ای را هم به عنوان حالت تباهیده، بازه بسته در نظر می‌گیریم).

### سوال ۵

فرض کنید  $p$  یک عدد اول و  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  یک دنباله از اعداد صحیح باشند که  $\sum_{d|n} a_d = p^n$ . ثابت کنید  $a_n$  بر  $n$  بخشپذیر است.

موفق باشید

## مسابقه دانشکده علوم ریاضی

اسفند ۱۳۹۴

روز دوم، زمان: ۴ ساعت

### سوال ۱

نشان دهید اگر  $A$  ماتریسی  $n \times n$  وارون پذیر با درایه‌های مختلط و  $A^{۱۳۹۴}$  قطری شدنی باشد،  $A$  هم قطری شدنی است.

### سوال ۲

فرض کنید  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  تابعی یک به یک و  $\epsilon$  عددی مثبت باشد. ثابت کنید سری زیر همگرا است:

$$\sum \frac{1}{n^{\epsilon f(n)}}$$

### سوال ۳

نشان دهید در حلقه‌های بولی (یعنی حلقه‌ای که در آن برای هر عضو مثل  $a$ ،  $a^2 = a$ ) هر ایده‌آل متناهی تولید شده اصلی است.

### سوال ۴

فرض کنید  $\mathbb{D}$  دیسک واحد در صفحه مختلط و  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  تابعی است که روی  $\mathbb{D}$  پیوسته و در داخل آن هولومورف است. نشان دهید اگر  $f$  بر بازه‌ای روی مرز  $\mathbb{D}$  صفر باشد متحداً با صفر است.

### سوال ۵

$A$  را مجموعه همه زیرمجموعه‌های  $n$  عضوی از  $\{1, 0, \dots, 2n\}$  بگیرید. نشان دهید  $A$  را می‌توان به شش دسته افراز کرد طوری که اشتراک هر دو عضو از یک دسته حداقل دو عضوی باشد.