

(بارم تمام سئوالات برابر است)

مدت امتحان: ۴ ساعت

۱) در یک مسابقه شطرنج، که با شرکت  $n$  نفر انجام شد، هر دو نفری دقیقاً یکبار

با هم بازی کرده اند، و هیچ حالت تساوی رخ نداده است. حال ماتریس  $A, n \times n$ ، با درایه های

صفر و یک را چنین می سازیم: درایه  $a_{ij}$  را یک می گذاریم اگر و تنها اگر نفر  $i$ ام،

نفر  $j$ ام را برده باشد. (روی قطر  $A$  را نیز صفر می گذاریم) ثابت کنید:  $n-1 \geq \text{رتبه } A$ ،

۲) فرض کنید  $N$  و  $H$  زیرگروههایی از یک گروه  $G$  باشند بطوریکه:  $N \triangleleft G, N \triangleleft H$

$[G:H] \infty$  و  $[G:H] = |G:H|$  ثابت کنید  $N \triangleleft H$ .

۳) فرض کنید  $R$  یک حلقه باشد. بطوریکه برای هر  $x \in R$ ،  $x^2 = x$  ثابت کنید

برای هر  $x \in R$  داریم:  $x^2 = x$ .

۴) اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  واگرا باشد. درباره همگرایی و واگرایی  $\sum_{n=1}^{\infty} n U_n$  چه میتوان گفت؟

۵) فرض کنید تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  مشتق پذیر بوده و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$

ثابت کنید:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

۶) فرض کنید  $S$  مجموعه توابع  $f$  از  $\mathbb{R}$  به  $\mathbb{R}$  باشد که هر یک از این توابع مشتق پذیر

باشند پیوسته است و  $f(0) = f(1) = 0$  نشان دهید عددی مانند  $\epsilon$  وجود دارد.

بطوریکه برای هر  $f \in S$  داریم:  $\int_0^1 (f(x))^2 dx \leq 1 \int_0^1 (f'(x))^2 dx$  متفق باشید.