# مسابقه ریاضی دانشجویی — دانشگاه صنعتی شریف — دانشکده علوم ریاضی

## نوبت اول — ۸۲/۱۱/۲۹

## مدت امتحان: چهار ساعت

تمامی سوالات امتیاز برابر دارند

۱) در یک صفحهٔ شطرنجی $8 \times 8$، حداکثر چند مهره اسب می‌توان قرار داد به طوری که هیچ دو مهرهٔ اسبی یکدیگر را تهدید نکنند؟

۲) فرض کنید $V$ و $W$ فضاهای برداری با بعد متناهی روی میدان $K$ باشند. $f : V^n \to W$ تابعی با خواص زیر است:

i) برای هر $i \in \{1, \dots, n\}$ و $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \in V$ نگاشت

$$\begin{cases} V \to W \\ x \mapsto f(v_1, \dots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \dots, v_n) \end{cases}$$

یک نگاشت خطی از $V$ به $W$ است.

ii) اگر $v_i = v_{i+1}$ که $1 \leq i \leq n-1$، آنگاه $f(v_1, \dots, v_n) = 0$.

ثابت کنید یا $\dim V \geq n$ و یا $f \equiv 0$.

۳) $A$ یک زیرمجموعهٔ ناشمارا از $\mathbb{R}$ است. ثابت کنید ناشمارا نقطه از اعضای $A$، نقطهٔ انباشتگی $A$ هستند.

($x \in \mathbb{R}$ را نقطهٔ انباشتگی $A$ گویند هرگاه هر همسایگی باز حول $x$، ناشمارا نقطه از اعضای $A$ را شامل باشد).

۴) تعداد زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, 6100\}$ را بیابید که مجموع اعضای آنها بر ۸۱۹۲ بخشپذیر باشد.

۵) فرض کنید $n$ عددی فرد باشد. ثابت کنید برای هر ایده‌آل $I$ از حلقهٔ $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^n - 1)}$ داریم $I^2 = I$.

۶) دنباله‌های $\{x_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty}$ $(n \in \mathbb{N})$ از اعداد حقیقی به گونه‌ای هستند که $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)}| < \infty$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ و همچنین برای هر دنبالهٔ کراندار $\{l_i\}_{i=1}^{\infty}$ از اعداد حقیقی داریم $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{(n)} l_i \to 0$ وقتی $n \to \infty$. ثابت کنید $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)}| \to 0$ وقتی $n \to \infty$.

**مسابقه ریاضی دانشجویی – دانشگاه صنعتی شریف – دانشکده علوم ریاضی**
**نوبت دوم – ۸۲/۱۱/۳۰**
**مدت امتحان: چهار ساعت**

---

تمامی سوالات امتیاز برابر دارند

۱) در یک انتخابات ۲۰ نفر کاندیدا و ٦٦ نفر رأی دهنده وجود دارد. قرار است هر فرد رأی دهنده به سه نفر از کاندیداها رأی دهد. ثابت کنید دو نفر از کاندیداها وجود دارند که هیچ رأی دهنده‌ای به هر دوی آنها به طور همزمان رأی نداده است.

۲) توابع حقیقی $f$، $g$ در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + a_0 f^{(0)} = 0$$
$$g^{(m)} + b_{m-1} g^{(m-1)} + \cdots + b_0 g^{(0)} = 0$$

که در آن $a_i$ها و $b_i$ها اعداد حقیقی هستند. اگر $F = fg$، نشان دهید اعداد حقیقی $c_0, \ldots, c_{mn}$ وجود دارند که همگی با هم صفر نیستند و

$$c_{mn} F^{(mn)} + c_{mn-1} F^{(mn-1)} + \cdots + c_0 F^{(0)} = 0$$

(منظور از $h^{(k)}$ مشتق $k$ ام تابع $h$ است)

۳) تابع $f : [0,1] \to [0,1]$ صعودی است و داریم:

$$f\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2} 2^{-j}$$

هرگاه $a_j$ها صفر یا ۲ باشند. نشان دهید ثابت $C$ وجود دارد که برای هر $0 \le x, y \le 1$

$$|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^{\frac{\log 2}{\log 3}}$$

۴) فرض کنید $U$ زیرمجموعهٔ بازی از $\mathbb{R}^n$ باشد و $f : U \to \mathbb{R}$ پیوسته، یک به یک، پوشا و با وارون پیوسته داده شده باشد.

الف) نشان دهید $n = 1$.

ب) آیا می‌توان نتیجه گرفت $U = \mathbb{R}$؟ اگر $f$ پیوسته یکنواخت باشد چطور؟

۵) فرض کنید $G$ یک گروه باشد که هر زیرگروه سرهٔ آن در یک زیرگروه ماکسیمال با اندیس متناهی قرار گیرد. اگر هر دو زیرگروه ماکسیمال $G$ مزدوج باشند، ثابت کنید $G$ دوری است.

٦) $A, B$ ماتریسهایی مربعی با درایه‌های مختلط هستند بطوریکه $AB - BA$ به صورت ترکیب خطی $A, B$ است. نشان دهید $B$ و $A$ حداقل یک بردار ویژهٔ (غیرصفر) مشترک دارند.