



مسابقه ریاضی دانشجویی  
دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده علوم ریاضی  
موضوع امتحان: تحقیق در عملیات

مدت امتحان: ۲ ساعت

تاریخ: ۸۳/۱۱/۲۹

بارم هر سؤال ۱۰ نمره است.

سؤال (۱) مسئله پیدا نمودن کمترین فاصله (اقلیدسی) یک نقطه مانند  $x$  از ابرصفحه  $\{x : Ax = b\}$  که در آن  $A$  یک ماتریس با رتبه سطری کامل است مد نظر است. این مسئله را مدل سازی کنید و سپس فاصله مینیمم و نقطه بهینه را بیابید.

سؤال (۲) مسئله برنامه ریزی خطی

$$\begin{aligned} \min : & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

و دوگان آن را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned} \max : & b^T y \\ & A^T y + s = c \\ & s \geq 0 \end{aligned}$$

مجموعه های زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, s) \mid Ax = b, A^T y + s = c, x \geq 0, s \geq 0\}, \\ F^\circ &= \{(x, y, s) \mid Ax = b, A^T y + s = c, s > 0, x > 0\}. \end{aligned}$$

فرض کنید  $F^\circ \neq \emptyset$ . ثابت کنید به ازای هر  $K \geq 0$  مجموعه زیر کراندار است (یعنی لااقل  $M > 0$  موجود است

که برای هر  $(x, s) \in G_k$  داریم:  $|s_i| \leq M, |x_i| \leq M$  برای هر  $i = 1, 2, \dots, n$ )

$$G_k = \{(x, s) \mid (x, y, s) \in F, x^T s \leq K\}$$

سؤال (۳) مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min : & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید که هر دو مسئله اولیه و دوگان دارای جواب شدنی باشند. مجموعه جوابهای بهینه مسئله اولیه را  $P$  و مجموعه جوابهای بهینه مسئله دوگان را با  $D$  نمایش دهید. مسئله دوگان را به شکل زیر در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \max : & b^T y \\ & A^T y + s = c \\ & s \geq 0 \end{aligned}$$

ثابت کنید اگر مجموعه های  $P$  و  $D$  کراندار باشند آنگاه مسئله اولیه دارای جواب شدنی  $\bar{x}$  است که  $\bar{x} > 0$  و

مسئله دوگان دارای جواب شدنی  $(\bar{y}, \bar{s})$  است که  $\bar{s} > 0$ .